b) $U_n \geq 0$ d'aprés a)

* d'aprés II/ 1)

$U_n = g_n(\alpha_n) \leq g_1(\alpha_n)$

d'où $0 \leq U_n \leq g_1(\alpha_n)$

c) $g_1(\alpha_n) = \alpha_n \cdot \sqrt{\alpha_n(1-\alpha_n)}$

$g_1(\alpha_n) = \frac{2n+1}{2(n+1)} \cdot \frac{\sqrt{2n+1}}{2(n+1)}$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{2(n+1)} = 1$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{2n+1}}{2(n+1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{2(n+1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = 0$

d'où $\lim_{n\to+\infty} g_1(\alpha_n) = 0$

$0 \leq U_n \leq g_1(\alpha_n)$; $\lim_{n\to+\infty} g_1(\alpha_n) = 0$ d'où $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$

EX 42 :

1) (E): $x^3 - 10x^2 - 1 = 0$

on pose $h(x) = x^3 - 10x^2 - 1$

$h(10) = -1$; $h(11) = 120$

h est continue sur $[10,11]$

$h(10) \times h(11) < 0$

d'où il existe un réel $a \in]10,11[$ tq $h(a) = 0$

h est dérivable sur $\mathbb{R}$

$h'(x) = 3x^2 - 20x$

x	$-\infty$	0		20/3	$+\infty$
h'(x)		+ 0	−	0	+
h(x)	$-\infty$	-1	↘	$\frac{-4027}{27}$	↗ $+\infty$

h est strictement croissante sur $\left[\frac{20}{3}, +\infty\right[$

d'où a est la seule solution de l'équation : h(x)=0

dans $\left[\frac{20}{3}, +\infty\right[$

* dans l'intervalle $\left]-\infty, \frac{20}{3}\right[$

h admet (-1) comme maximum absolu

$\Rightarrow h(x) \leq -1$; $\forall x \in \left]-\infty, \frac{20}{3}\right[$

d'où l'équation h(x)=0 n'a pas de solutions dans $\left]-\infty, \frac{20}{3}\right[$

conclusion : a est la seule solution de (E)

2) 0 n'est pas une solution de (E)

dans $\mathbb{R}^*$: $(E) \Leftrightarrow x^3 = 10x^2 + 1 \Leftrightarrow x = 10 + \frac{1}{x^2}$

3) $f(x) = 10 + \frac{1}{x^2}$; $x \in [10,+\infty[$

a) $f'(x) = \frac{-2}{x^3} < 0$ $\forall x \in [10,+\infty[$

f est continue et strictement décroissante sur $[10,+\infty[$

$f([10,+\infty[) = \left]\lim_{+\infty} f, f(10)\right] =]10 ; 10,01]$

b) $\begin{cases} U_0 = 10 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

Remarquons que : $U_n \geq 10$; $\forall n \in \mathbb{N}$

$|f'(x)| = \frac{2}{x^3}$

pour $x \geq 10 \Rightarrow x^3 \geq 1000 \Rightarrow \frac{1}{x^3} \leq \frac{1}{1000} \Rightarrow |f'(x)| \leq \frac{1}{500}$

f est dérivable sur $[10,+\infty[$; $|f'(x)| \leq \frac{1}{500}$

a et $U_n \in [10,+\infty[$

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn